

**(Μέρος της εργασίας για το 7ο ΠΑΓΚΥΠΡΙΟ ΜΑΘΗΤΙΚΟ
ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ)**

**ΧΕΙΡΟΚΙΝΗΤΟΣ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΕΙ ΤΟΥΣ 6
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΑΙ ΠΑΡΟΜΟΙΟΣ
ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΠΟΥ ΛΕΙΤΟΥΡΓΕΙ ΜΕ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ.**

Φίλιππου Παπαφιλίππου, μαθητή Γ' Λυκείου, Παγκύπριο Γυμνάσιο
Συντονιστής καθηγητής: Ιωάννης Φάκας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ιωάννη Φάκα:

Το Καλοκαίρι του 1972, έλαβα μέρος στο θερινό σεμινάριο «the teaching of Modern Mathematics», στο Αμερικανικό Πανεπιστήμιο της Βηρυτού. Μία από τις δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια αυτού του σεμιναρίου ήταν και η δημιουργία εποπτικών μέσων στα Μαθηματικά με την χρήση εργαστηρίων. Τότε δημιούργησα ένα χειροκίνητο μηχανισμό που λειτουργεί για την κατανόηση και ορισμό των 6 τριγωνομετρικών αριθμών: ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη, συνεφαπτομένη, τέμνουσα και συντέμνουσα, μέσα στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Το 2008 γνωρίστηκα με τον μαθητή Φίλιππο Παπαφιλίππου στα Φροντιστήρια Φάκα όπου του δίδασκα GCE A Level. Διαπίστωσα ότι παρόμοια εργασία έχει κατασκευάσει και ο Φίλιππος, αλλά αυτή την φορά με την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, την οποία ήδη έχει αναρτήσει στην ιστοσελίδα του: www.philippos.info

Φίλιππος Παπαφιλίππου:

Στην Α' Λυκείου δημιούργησα ένα πρόγραμμα στην προσπάθεια μου να καταλάβω το πως δουλεύει ο τριγωνομετρικός κύκλος. Είναι διαδραστικός τριγωνομετρικός κύκλος και αποτελεί ένα ερασιτεχνικό πρόγραμμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσο για καλύτερη κατανόηση του τριγωνομετρικού κύκλου. Η μοναδικότητα του προγράμματος έγκειται στην ευκολία με την οποία θα μπορούσε η διδασκαλία του τριγωνομετρικού κύκλου να γίνει αποτελεσματικότερη. Επιπλέον, η παρουσίαση του προγράμματος ελπίζουμε να προκαλέσει τον ενθουσιασμό προς τον προγραμματισμό, όντας ενότητα που σχετίζεται άμεσα με τα μαθηματικά.

Φέτος παρουσιάζουμε μαζί και οι δύο τις 2 εργασίες μας στο Συνέδριο της Μαθηματικής Εταιρείας.

Φίλιππος Παπαφιλίππου Παγκύπριο Γυμνάσιο

Τριγωνομετρία

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι έξι και είναι οι λόγοι των 3 πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου ανά 2. Οι πιο γνωστοί είναι το ημίτονο (ημ), το συνημίτονο (συν) και η εφαπτομένη (εφ). Οι άλλοι τρεις αριθμοί συντέμνουσα (στεμ), τέμνουσα (τεμ) και συνεφαπτομένη (σφ), είναι οι αντίστροφοι των προηγούμενων. Οι λόγοι των πλευρών ενός τριγώνου είναι έξι διότι αν παίρνουμε κάθε φορά δύο και την κάθε φορά φτιάχνουμε 2 λόγους (α/β και β/α), υπάρχουν 6 συνδυασμοί. Για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με διαφορετικές γωνιές οι τριγωνομετρικοί αριθμοί αλλάζουν. Εκτός από πράξεις με ορθογώνια τρίγωνα, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μπορούν να βρουν εφαρμογές σε όλα τα τρίγωνα έστω κι αν αναφέρονται σε γωνιά ορθογωνίων τριγώνων.

Μέθοδος τριγωνομετρικού κύκλου στο πρόγραμμα

Το πρόγραμμα είναι διαδραστικός τριγωνομετρικός κύκλος και σχηματίζει 3 τρίγωνα που μας δίνουν 2 τριγωνομετρικούς αριθμούς το καθένα. Η υπολειπόμενη πλευρά των τριγώνων ισούται με την ακτίνα του κύκλου. Η ακτίνα του κύκλου καθορίζεται 1 έτσι ώστε στους λόγους ως παρονομαστής να είναι το 1 και επομένως οι δύο από τις πλευρές του κάθε τριγώνου δίνουν άμεσα από ένα τριγωνομετρικό αριθμό. Στο πρόγραμμα η κάθε πλευρά έχει διαφορετικό χρώμα για την εύκολη παραπομπή στον τριγωνομετρικό αριθμό που αντιπροσωπεύει. Αποτελείται από δύο σκηνικά. Το ένα είναι ο διαδραστικός τριγωνομετρικός κύκλος και το άλλο είναι στατική γραφική επεξήγηση. Στο διαδραστικό μέρος του προγράμματος, η γωνιά για την οποία θα ισχύουν οι αριθμοί μπορεί να εισαχθεί με το πληκτρολόγιο ή με το πάτημα του κέρσορα σε σημείο που ανήκει αντίστοιχη γωνιά.

Μπορούμε να διαλέξουμε όσα τρίγωνα θέλουμε από τα τρία που μπορούν να σχηματιστούν.

Στο μάθημα των μαθηματικών διδάσκεται το ένα τρίγωνο μόνο (ημίτονου - συνημίτονου) και ένας άλλος γραφικός τρόπος για διάκριση της εφαπτομένης. Παρόμοια προγράμματα με διαδραστικό τριγωνομετρικό κύκλο υπάρχουν, όμως αυτά δίνουν μόνο τους 2 ή 3 αριθμούς και χωρίς την ίσως νέα μέθοδο των τριών τριγώνων και διάκριση με χρώματα.

Ανάπτυξη του προγράμματος

Το πρόγραμμα είναι γραμμένο στην γλώσσα Actionscript (flash). Όταν το έγγραφο ήταν λίγες μέρες μετά που έγινε αναφορά του τριγωνομετρικού κύκλου στο σχολείο (Α Λυκείου). Μου ήταν δύσκολο να κατανοήσω την λειτουργία του και προσπαθούσα να τον φανταστώ διαδραστικό για να καταλάβω καλύτερα. Όταν άρχισα να το

κατασκευάζω μου έγινε σιγά-σιγά εντελώς αντιληπτός σε σημείο που σκέφτηκα δικό μου τρόπο χρήσης με τα τρία τρίγωνα και τα χρώματα. Δεν έκανα μαθήματα πληροφορικής, αλλά έμαθα να προγραμματίζω από διάφορα διαδικτυακά παραδείγματα μετά από πολύ ενθουσιασμό για τον προγραμματισμό. Πριν το αναπτύξω έκανα ήδη και άλλα προγράμματα για το σχολείο και μέχρι σήμερα είναι αναρτημένα στην ιστοσελίδα μου. Το συγκεκριμένο νομίζω μου πήρε 2 ημέρες για να τελειώσω.

Στον κώδικα του προγράμματος υπάρχουν εντολές που παίρνουν την δοσμένη γωνιά και διατάζουν τον υπολογιστή να γράψει στα αντίστοιχα κουτιά τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, όπως ακριβώς θα έκανε μια υπολογιστική. Για το γραφικό μέρος, ο κύκλος, τα πλαίσια, τα γράμματα εκτός τα τρίγωνα, είναι προσχεδιασμένα με το ποντίκι. Τα τρίγωνα καλείται ο υπολογιστής να σχηματίσει βασίζόμενος στους προϋπολογισμένους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Γι' αυτό και το σχήμα είναι πολύ ακριβές. Αντίθετα με το κατασκευάσμα του κ. Φάκα, το πρόγραμμα δεν βρίσκει τους αριθμούς από το σχήμα διότι δεν είναι στους στόχους του. Όμως στον χρήστη αυτό δεν παίζει κανένα ρόλο διότι τα τρίγωνα εφαρμόζουν τέλεια στο σχήμα που του δίδεται η ψευδαίσθηση ότι πρώτα σχηματίζονται τα τρίγωνα. Το πιο δύσκολο μέρος του κώδικα που γράφτηκε είναι η λειτουργία που εντοπίζει την γωνία που εισάγεται με το πάτημα του ποντικιού σε κάποιο σημείο στο τριγωνομετρικό κύκλο.

Για λόγους ενθουσιασμού επισυνάπτεται μέρος του κώδικα για ένα τρίγωνο:

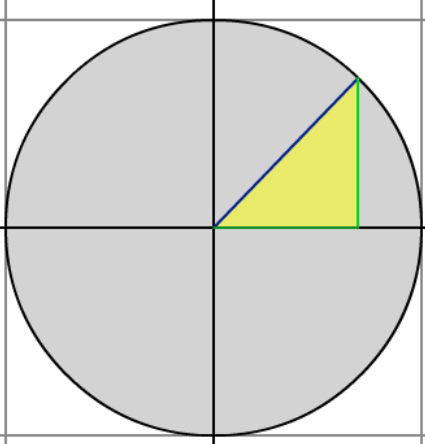
```
if(tt0==1){_root.createEmptyMovieClip("tr1_mc", 3);
tr1_mc.lineStyle(2, 0x002291, 100);
tr1_mc.beginFill(0xFFFF00, 50);
tr1_mc.moveTo(ox,oy);
x=ox+r*cosf;
y=oy-r*sinf;
tr1_mc.lineTo(x,y);
tr1_mc.lineStyle(2, 0x00D626, 100);
tr1_mc.lineTo(x,oy);
tr1_mc.lineStyle(2, 0x0E8E21, 100);
tr1_mc.lineTo(ox,oy); }
```

Ελπίζω ότι με την παρουσίαση του προγράμματος αυτού εκτός του ότι θα κινήσει το ενδιαφέρον σε καθηγητές να χρησιμοποιούν προγράμματα σαν αυτό στη διδασκαλία, ότι μαθητές θα ενδιαφερθούν να «προγραμματίσουν» με την ίδια ευκολία που κατάφερα κι εγώ.

Εικόνες από το πρόγραμμα:

Μέθοδος χρήσης του τριγωνομετρικού κύκλου

$\hat{\phi} = 46^\circ$



τρίγωνο 1 ■

ημ $\phi = 0.7193396$

συν $\phi = 0.6946588$

$r = 1$

τρίγωνο 2 ■

εφ $\phi = 1.0355305$

τέμ $\phi = 1.4395566$

$r = 1$

τρίγωνο 3 ■

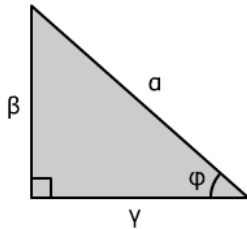
σφ $\phi = 0.9656888$

στεμ $\phi = 1.3901666$

$r = 1$

επεξήγηση
Παπαφιλίππου Φίλιππος 06/02/2009

Οι τριγωνικοί αριθμοί είναι 6. Ορίζονται ως οι λόγοι των πλευρών στα ορθογώνια τρίγωνα.

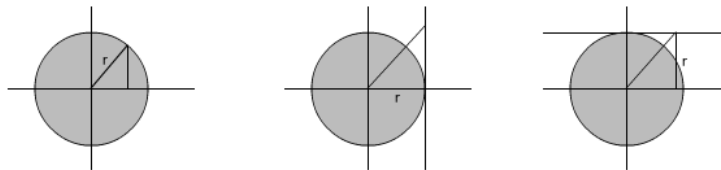


ημίτονο $\phi = \beta / \alpha$	συνεφαπτομένη $\phi = \gamma / \beta$
συνημίτονο $\phi = \gamma / \alpha$	τέμνουσα $\phi = \alpha / \gamma$
εφαπτομένη $\phi = \beta / \gamma$	συντέμνουσα $\phi = \alpha / \beta$

Χρησιμοποιούνται όμως και σε άλλα τρίγωνα για την συνεύρεση γωνιών και πλευρών τους.

Μέθοδος εύρεσης με τον τριγωνομετρικό κύκλο

Κατ' αυτήν λειτουργούν 3 τρίγωνα που μας δίνουν 2 τριγωνομετρικούς αριθμούς το καθένα. Η υπολειπόμενη πλευρά των τριγώνων ισούται με την ακτίνα του κύκλου. Η ακτίνα του κύκλου καθορίζεται 1 έτσι ώστε στους λόγους ως παρονομαστής να είναι 1 και επομένως η κάθε τους πλευρά δίνει άμεσα και ένα τριγωνομετρικό αριθμό.



Φωτογραφίες από το συνέδριο:

